Funktionendesign: Steckbrief- oder Parameteraufgaben

Bei einer Kurvendiskussion versucht man die Eigenschaften einer gegebenen Funktion zu ermitteln.
In einer Steckbriefaufgabe geht man genau umgekehrt vor: man kennt einige Eigenschaften und sucht nun den dazu passenden Funktionsterm.
Diese Eigenschaften sind meist in Form eines Textes oder eines Graphen gegeben und müssen nun in mathematische Ausdrücke (Gleichungen) umgesetzt werden.

Die Gleichungen beschreiben dann alle zusammen das ihnen gemeinsame Objekt, die gesuchte Funktion. Die Gleichungen bilden also ein Gleichungssystem, was mit den bekannten Methoden (z.B. Gauß-Verfahren) zu lösen ist.

Untersucht man die gefundene Funktion nun mit den Mitteln der Kurvendiskussion, so kann man ihre Eigenschaften mit den vorgegebenen Informationen vergleichen. Man erhält so neben der Kontrolle noch eine Übersicht über die weiteren Eigenschaften des Graphen.

Beispiel: Eine quadratische Parabel besitzt die Nullstelle 4 und den Scheitelpunkt S(1 | -2).

(1) *Eine quadratische Parabel ...*

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$
$$f'(x) = 2ax + b$$

(2) *... besitzt die Nullstelle 4 ...*

$$f(4) = 0 \Rightarrow 16 \cdot a + 4 \cdot b + c = 0$$

(3) *... und den Scheitelpunkt S(1 | -2).*

$$f(1) = -2 \Rightarrow a + b + c = -2$$
$$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

a	b	c	
1	1	1	-2
16	4	1	0
2	1	0	0
		...	
1	0	0	$\frac{2}{9}$
0	1	0	$-\frac{4}{9}$
0	0	1	$-\frac{16}{9}$

Die zugehörige Funktion lautet also

$$f(x) = \tfrac{2}{9}x^2 - \tfrac{4}{9}x - \tfrac{16}{9} = \tfrac{2}{9} \cdot (x^2 - 2x - 8)$$

Die gegebenen Punkte stellen sog. „Stützpunkte“ für den Graphen der Funktion dar:
P(Stützstelle | Stützwert).

Für ein Polynom n-ten Grades benötigt man n+1 Stützpunkte: $f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + \ldots + z$

Folgende Liste typischer Formulierungen soll bei der Übersetzung ins „Mathematische" helfen. Notiere die Bedingungen für die folgenden Fälle:

Die ganzrationale Funktion f(x) hat an der Stelle[1] x = 7 ...

Punkte

- … den Punkt P(7|3). ______
- … den Funktionswert[2] 18. ______
- … eine Nullstelle. ______

Steigung

- … eine Steigung[3] mit dem Wert 5. ______
- … den Steigungswinkel[4] α = 35° ______

Tangente

- … eine Tangente[5] mit der Steigung 4,5. ______
- … eine Tangente, welche die x-Achse unter einem Winkel[3] von 20° schneidet. ______
- … die Tangente y = 3 x – 8. ______
- … die erste Winkelhalbierende[6] als Tangente. ______
- … die zweite Winkelhalbierende[6] als Tangente. ______
- … eine waagerechte Tangente. ______
- … eine Tangente, die parallel[7] zur Geraden y = 2 x + 11 verläuft. ______

---

[1] Mit „Stelle" bezeichnet man die x-Koordinate eines Punktes.

[2] Funktionswert = y-Wert = $f(x_0)$. Wert, den man erhält, wenn man x_0 in den Funktionsterm einsetzt.

[3] Die Steigung einer Funktion f(x) an der Stelle $x = x_0$ wird durch ihre erste Ableitung an dieser Stelle angegeben: $f'(x_0)$.
Also: die erste Ableitung beschreibt das Steigungsverhalten einer Funktion !

[4] Für den Steigungswinkel α eines Funktionsgraphen (relativ zur x-Achse) an der Stelle $x = x_0$ gilt: $m_t = f'(x_0) = \tan(\alpha)$

[5] Eine Tangente ist eine Gerade ($t: y = m_t \cdot x + b_t$), die eine Funktion in einem Punkt berührt. Im Berührpunkt $BP(\ x_0 \ | \ f(x_0)\ )$ hat die Tangente die gleichen Koordinaten und die gleiche Steigung wie die Funktion: $m_t = f'(x_0)$

[6] Die erste Winkelhalbierende: y = x, die zweite Winkelhalbierende: y = - x

[7] Geraden sind parallel, wenn sie die gleiche Steigung haben:
$g_1 : y = m_1 \cdot x + b_1 \quad g_2 : y = m_2 \cdot x + b_2 \quad g_1 \ || \ g_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

··· und im Punkt P(12 | 25) parallele Tangenten.

··· eine Tangente, die parallel zur x-Achse verläuft.

··· eine Tangente, die senkrecht[8] zur Geraden y = 9 x - 15 verläuft.

··· die Normale[9] y = 8 x + 22.

Extrema

··· ein absolutes (globales) Extremum[10].

··· eine relative (lokale) Extremstelle.

··· einen Hochpunkt (Maximum).

··· einen Tiefpunkt (Minimum).

··· Max (7 | -10)

··· eine Berührstelle[11] (Berührpunkt).

··· eine doppelte[12] Nullstelle.

··· die x-Achse als Tangente.

WP

··· einen Wendepunkt[13].

··· einen Sattelpunkt (= Terrassenpunkt)[14].

---

[8] Geraden verlaufen senkrecht (orthogonal), wenn das Produkt ihrer Steigungen „-1" ergibt:

$$g_1 : y = m_1 \cdot x + b_1 \quad g_2 : y = m_2 \cdot x + b_2$$
$$g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

[9] Eine Normale ist eine Gerade ($n: \; y = m_n \cdot x + b_n$), die <u>im Berührpunkt</u> senkrecht auf der Tangente steht: $t \perp n \Leftrightarrow m_t \cdot m_n = -1 \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_n}$

[10] Da man Gleichungen benötigt, wird nur die notwendige Bedingung für Extrema, $f'(x) = 0$, ausgewertet. Es wird also nicht zwischen Hoch- oder Tiefpunkten unterschieden: die 2. Ableitung spielt hier keine Rolle, da sie keine Gleichung, sondern eine Ungleichung liefert.

[11] Eine Berührstelle ist immer ein Extremum: die Funktion kommt von oben (oder unten), berührt die x-Achse (Nullstelle) und entfernt sich wieder von ihr.

[12] Allgemein: geradzahlig vielfache Nullstelle (s.a. Berührstelle).

[13] Die notwendige Bedingung für Wendepunkte lautet: $f''(x) = 0$. Die hinreichende Ergänzung ($f'''(x) \neq 0$) spielt hier keine Rolle, da sie (analog zur 2. Ableitung bei den Extrema, siehe dort) eine Ungleichung liefert.

[14] Ein Sattel-, Terrassen- oder Stufenpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Die Tangente durch den Wendepunkt nennt man Wendetangente.

- … eine waagerechte Wendetangente.

WP
- … die x-Achse als Wendetangente.
- … die Gerade y = 4x-11 als Wendetangente.
- … eine dreifache[15] Nullstelle.
- … einen Flachpunkt[16]
- … einen stationären[17] Punkt (= Waagerecht-punkt).

Schnitt
- … einen gemeinsamen Punkt (= Schnittpunkt) mit der Funktion g(x) = ...
- … einen Berührpunkt[18] mit der Funktion g(x) = ...

Die ganzrationale Funktion f(x) schneidet ...

- … an der Stelle x=7 die Funktion g(x) rechtwinklig.
- … an der Stelle x=7 die Funktion g(x) unter dem Winkel α=17°.
- … die y-Achse[19] bei y = 5.
- … bei 5 die x-Achse.
- … die y-Achse bei y=12 unter einem Winkel von 28°.

[15] Allgemein: ungeradzahlig vielfache Nullstelle größer eins (s.a. Terrassenpunkt).

[16] Ein Flachpunkt ist ein Punkt, an dem die 2. Ableitung eine Nullstelle besitzt ($f''(x) = 0$). Wenn die zweite Ableitung dort einen Vorzeichenwechsel erfährt bzw. die dritte Ableitung ungleich null ist, so handelt es sich bei dem Flachpunkt um einen Wendepunkt. Ansonsten ändert sich die Krümmung der Kurve dort nicht und es liegt dann kein Wendepunkt vor.
Beispiele: $f(x) = 2x^4 - x$, Flachpunkt im Ursprung O(0 | 0)
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$, Flachpunkt bei P(1 | 4) = Terrassenpunkt

[17] Alle Punkte mit waagerechter Tangente bezeichnet man als „Stationäre Punkte“ oder „Waagerechtpunkte“, unabhängig, ob es sich um ein Extremum oder einen Sattelpunkt handelt.

[18] Die beiden Funktionen f(x), g(x) haben in ihrem Berührpunkt die gleichen Koordinaten und eine gemeinsame Tangente, d.h. sie haben dort die gleiche Steigung.

[19] Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt x=0, also S_y(0 | f(0)).

Die ganzrationale Funktion f(x) ist ...

Symmetrie

- ... achsensymmetrisch zur y-Achse.
- ... punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiel 1

Eine ganz-rationale Funktion vierten Grades berührt in x=–2 die x-Achse und hat bei x=1 die 2. Winkelhalbierende als Wende-Normale.

(1) *Eine ganz-rationale Funktion vierten Grades ...*

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

(2) *... berührt in x=–2 die x-Achse ...*

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 16 \cdot a - 8 \cdot b + 4 \cdot c - 2 \cdot d + e = 0$$
$$f'(-2) = 0 \Rightarrow -32 \cdot a + 12 \cdot b - 4 \cdot c + d = 0$$

(3) *... und hat bei x=1 die 2. Winkelhalbierende als Wende-Normale.*

$$f(1) = -1 \Rightarrow a + b + c + d + e = -1$$
$$f'(1) = 1 \Rightarrow 4 \cdot a + 3 \cdot b + 2 \cdot c + d = 1$$
$$f''(1) = 0 \Rightarrow 12 \cdot a + 6 \cdot b + 2 \cdot c = 0$$

a	b	c	d	e	
1	1	1	1	1	- 1
16	- 8	4	- 2	1	0
4	3	2	1	0	1
- 32	12	- 4	1	0	0
12	6	2	0	0	0
				...	
1	0	0	0	0	$-\frac{1}{9}$
0	1	0	0	0	$-\frac{1}{27}$
0	0	1	0	0	$\frac{7}{9}$
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	$-\frac{44}{27}$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\tfrac{1}{9} \cdot x^4 - \tfrac{1}{27} \cdot x^3 + \tfrac{7}{9} \cdot x^2 - \tfrac{44}{27} \\ &= -\tfrac{1}{27} \cdot \left(3x^4 + x^3 - 21x^2 + 44\right) \end{aligned}$$

Beispiel 2

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat in W(0|-2) einen Wendepunkt und in T(2|0) ein Minimum.

(1) *Eine ganz-rationale Funktion dritten Grades ...*

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

(2) *... hat in W(0|-2) ...*

$$f(0) = -2 \Rightarrow \boxed{d = -2}$$

(3) *... in W(0|-2) einen Wendepunkt ...*

$$f''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

(4) *... und in T(2|0) ...*

$$f(2) = 0 \quad 8a + 2c - 2 = 0 \;|:2$$
$$4a + c = 1$$

(5) *... in T(2|0) ein Minimum.*

$$f'(2) = 0$$
$$12a + c = 0$$
$$\Rightarrow 8a = -1 \qquad \boxed{a = -\frac{1}{8}} \quad \boxed{c = \frac{3}{2}}$$
$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x - 2$$

Kontrolle: Kurvendiskussion

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x - 2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2} \qquad f''(x) = -\frac{3}{4}x$$

$$\text{Extrema: } f'(x_E) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_E) \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{Max.} \\ > 0 \Rightarrow \text{Min.} \end{cases}$$

$$f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_{E_{1,2}} = \pm 2$$

Nähere Untersuchung für $x_{E_1} = -2$:

$$f''(-2) = +\frac{3}{2} > 0 \quad \Rightarrow \text{Min.}$$
$$f(-2) = -4 \quad \Rightarrow \text{Min}(-2 \,|\, -4)$$

Nähere Untersuchung für $x_{E_2} = +2$:

$$f''(2) = -\frac{3}{2} < 0 \quad \Rightarrow \text{Max.}$$
$$f(2) = 0 \quad \Rightarrow \text{Max}(2 \,|\, 0)$$

Der Extrempunkt (2|0) ist ein Maximum und nicht, wie in der Aufgabenstellung gefordert, ein Minimum. D.h. es gibt <u>keine</u> ganzrationale Funktion dritten Grades, die in W(0|-2) einen Wendepunkt und in T(2|0) ein Minimum besitzt!

Übungen

1. Bestimme die ganz-rationale Funktion kleinsten Grades, deren Graph durch die Punkte A(-2 | -60,2), B(1 | 3,7), C(3 | 43,3) und D(-5 | -417,5) verläuft.
2. Eine Parabel 3. Ordnung ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Wendetangente hat die Steigung -9/16 ; die 1. Winkelhalbierende schneidet die Parabel bei x = 5/4.
3. Eine Parabel 4. Ordnung schneidet die x-Achse in P(4 | 0) und hat im Ursprung einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Sie schließt mit der x-Achse im ersten Quadranten eine Fläche von 6,4 FE ein. Berechne die Fläche, die von dem Grafen der Funktion und dem der schiefen Wendetangente eingeschlossen wird.

Ergebnisse

1. $f(x) = 2 \cdot x^3 - 4,3 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 5$
2.
3.

Weitere Übungen findet man z.B. im Jonczyk/Schneider[20]:

Kap. 5.2.: ganz-rat. Funktionen
Kap. 5.4.: gebrochen-rat. Funktionen
Kap. 5.6.: Exponentialfunktionen

[20] Jonczyk / Schneider: „Aufgabensammlung Analysis“ Schroedel-Verlag, 3-507-73222-X

Interessante Web-Seiten (Stand: 02.04.2005)

Parabeln	http://www.zum.de/schule/Faecher/M/NRW/pm/mathe/steckbr01.htm
Ganz-rat. Funkt.	http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/steckbr2.htm
	http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/kd_umkehr.htm
Übersetzungen	http://www.zum.de/schule/Faecher/M/NRW/pm/mathe/steckbr3.htm
Übungsaufgaben	http://www.mathesite.de/pdf/steck.pdf
	http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/diff.htm#ukd
Aufgabe mit Derive	http://www.mathewelt.de/workplace/lk112/aly2.htm
	http://www.fh-niederrhein.de/~gkorsch/mserv/mservhr/DERV3/DERV3.html
Online-Kurs	http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/koelnproj2/inhalt.htm
Spline	http://www.fh-niederrhein.de/~gkorsch/mserv/mservge/spline/spline.htm

Die Ergebnisse lassen sich mit einem Funktionenplotter einfach grafisch überprüfen:
www.kurvenprofi.de